



Uplifting Mathematics for All

Guía didáctica

Puntos que explotan

(Exploding Dots™)

Experiencia 4:

La resta

Visión general	2
Montones y hoyos; puntos y antipuntos	4
La resta	7
Apartado opcional: <i>El algoritmo tradicional</i>	10
Material A: <i>La resta</i>	12
Soluciones a las preguntas de «Material A»	13
Material B: <i>Exploraciones brutales</i>	13

Recursos relacionados:

- Podéis acceder a vídeos y más recursos en [Exploding Dots - Global Math Project](#).
- Accede a [actividades guiadas en Desmos](#).
- Juega en línea con el *widget* de [Dhimad](#) (incluye álgebra).

Visión general

Objetivos del alumno

¡La resta no existe! Los alumnos entienden la resta como la suma del opuesto. Con la invención de los antipuntos, ahora pueden hacer restas en una máquina $1 \leftarrow 10$ mediante sumas, y explicar la noción de «llevar» del algoritmo tradicional.

Breve resumen de la experiencia

¡La resta no existe! La resta no es nada más que la suma del opuesto.

Así que, inventamos la noción del opuesto de un punto —un antipunto (dibujado en blanco)—. Un punto y un antipunto juntos, como la materia y la antimateria, simplemente se aniquilan el uno al otro —¡PUFFF!— y no queda nada.

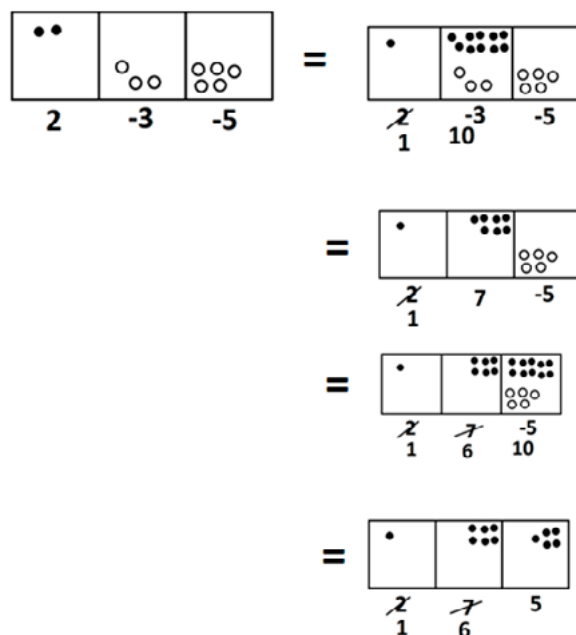
$$\begin{array}{ccccc} \bullet & + & \circ & = & \text{explosión} \\ 1 & & -1 & & 0 \end{array}$$

Ahora podemos hacer una resta en una máquina $1 \leftarrow 10$ simplemente añadiendo antipuntos.

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet\bullet\bullet \\ \circ\circ\circ \\ \hline \bullet \\ \circ\circ\circ \\ \hline \bullet\bullet \\ \circ\circ\circ\circ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet\bullet \\ \hline \circ\circ \\ \hline \circ\circ\circ\circ \\ \hline \end{array} \begin{array}{ccc} 2 & -3 & -5 \end{array}$$



Entonces, «haciendo no explotar» puntos, podemos hacer que esta solución (que es sólida desde el punto de vista matemático) sea del gusto de la sociedad.



Por supuesto, nuestra solución inicial de $2 \mid -3 \mid -5$ puede interpretarse como 200 y -30 y -5 , y también dará 165.

Introducción

Podéis ver el vídeo de bienvenida, en el que James introduce esta experiencia, aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [0:45 minutos].



Montones y hoyos; puntos y antipuntos

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [2:35 minutos].

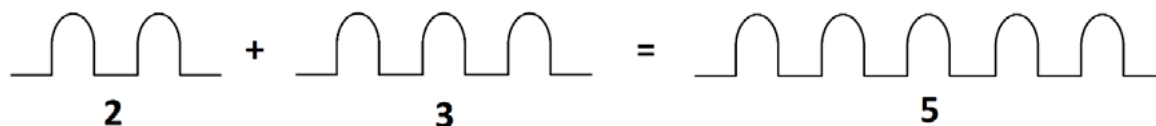
Este es el guion que sigue James cuando explica la lección en la pizarra. Por supuesto, podéis adaptarlo como mejor os convenga. En el vídeo podréis ver cuándo y cómo dibuja James los diagramas y cómo los va ampliando.

Hasta aquí hemos visto cómo funcionan la suma y la multiplicación. Pero nos hemos saltado la resta. ¿Por qué? Pues ¡porque no creo en la resta! Para mí, la resta no es nada más que la suma del opuesto.

Llegados a este punto, tenemos que elegir. Con los alumnos más pequeños puedo optar por esta historia de los montones y los hoyos.

Mi escepticismo hacia la resta se debe a otra historia que no es cierta. En resumen, es esta.

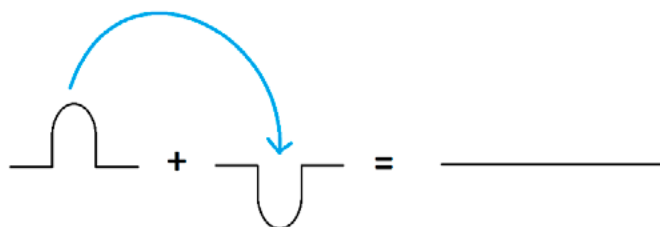
De pequeño jugaba a menudo en un arenero, donde descubrí los números naturales positivos en forma de montones de arena: un montón, dos montones..., y así sucesivamente. Además, descubrí cómo sumar números positivos simplemente alineando montones. Por ejemplo, vi que dos más tres es igual a cinco alineando montones de esta manera:



Me lo pasé bomba contando y alineando montones para investigar las sumas.

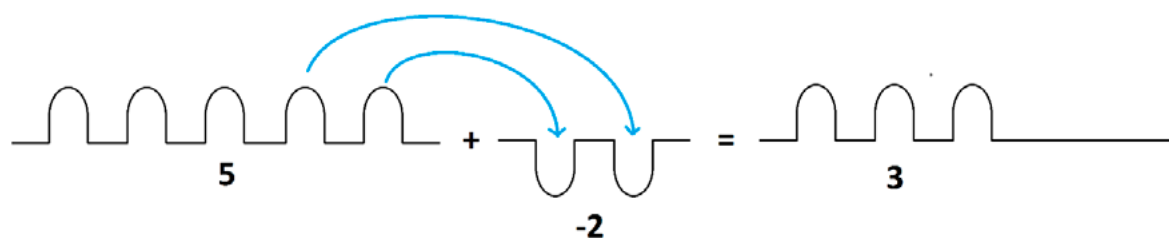


¡Y un día tuve una sorprendente revelación! Me di cuenta de que, además de hacer montones de arena, también podía hacer hoyos. Y enseguida vi que **un hoyo es el opuesto de un montón: si juntamos un montón y un hoyo, se anulan el uno al otro**. ¡Ostras!



Más adelante, en la escuela me enseñaron que «-1» era un hoyo y que «-2» eran dos hoyos, y así sucesivamente, y me dijeron que hiciera eso que llaman *resta*. Pero nunca llegué a creer en las restas. Mis compañeros leían $5 - 2$, por ejemplo, como «cinco menos dos», pero yo pensaba en cinco montones y en la suma de dos hoyos. En la imagen se ve que la solución son tres montones.





Sí, así obtengo el mismo resultado que mis compañeros, claro: los dos hoyos «restan» dos de los montones. Sin embargo, yo tenía una ventaja. Por ejemplo, mis compañeros decían que $7 - 10$ no tenía solución. Y yo dije que sí que tenía solución.

$7 - 10$ = siete montones y diez hoyos

= tres hoyos

= -3

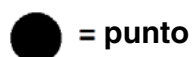
¡Fácil!

La resta no es nada más que la suma del opuesto.

(Por cierto, no tendría ningún problema en escribir $7 - 10$ como « $7 + -10$ ». Así se ve más claro el razonamiento.)

A partir de aquí me dirijo a los alumnos más mayores, pero no me olvido de los más pequeños.

En nuestra máquina $1 \leftarrow 10$ hemos trabajado con puntos, que he dibujado como puntos compactos.



Necesitamos el concepto del opuesto del punto.

Ahora tengo dos problemas: ¿Qué es para mí el opuesto de un punto? Y ¿cómo dibujo el opuesto de un punto?

No es broma: todos los adultos con los que he trabajado han propuesto el término *antipunto* para designar el opuesto de un punto, mientras que los niños me han propuesto siempre el término *otnup*, es decir, *punto* al revés. A mí me parece bien el término que la gente me proponga. (Aquí utilizaré *antipunto*.)

Algunos alumnos me han propuesto usar una X para dibujar los antipuntos, pero les he dicho que no porque la X ya se utiliza mucho en matemáticas y puede dar lugar a confusión si empezamos a hacer álgebra con nuestras máquinas de *Puntos que explotan*. Así que pido a los alumnos que dibujen los antipuntos como puntos vacíos.



Muy bien, dibujamos un círculo vacío para representar el opuesto de un punto, y lo llamamos *antipunto* (u *otnup*).

$$\bigcirc = \text{antipunto}$$



Al igual que la materia y la antimateria, que se anulan una a otra cuando se juntan, un punto y un antipunto también tendrían que anularse uno a otro —¡PUFFF!— cuando se juntan, y no dejar nada tras ellos.

$$\bullet + \bigcirc = \text{explosión}$$

1 -1 0

Por lo general, me detengo aquí, pero con alumnos más pequeños va muy bien añadir los ejemplos siguientes:

Y podemos hacer aritmética básica con puntos y antipuntos, como hemos hecho con montones y agujeros.

$$\begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$$

5 + -3 = 2

$$\begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \end{array} = \bullet$$

2 + -3 = -1

La resta

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [6:07 minutos].

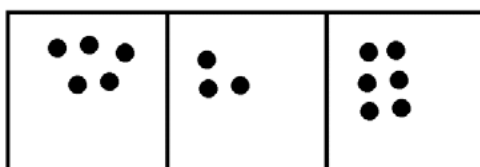
Muy bien. Ataquemos la resta.

Veamos esta resta.

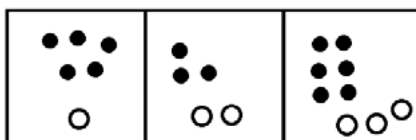
$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline \end{array}$$

Para mí, esto es 536 más el opuesto de 123.

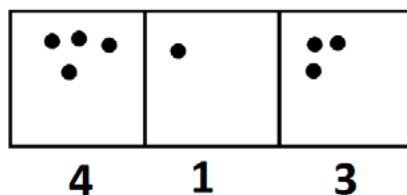
El primer número, 536, lo vemos así en una máquina $1 \leftarrow 10$: cinco puntos, tres puntos, seis puntos.



Y ahora añadimos el opuesto de 123. Es decir, estamos añadiendo una anticentena, dos antidecenas y tres antiunidades.



Y ahora viene una serie de aniquilaciones entre los puntos: ¡PUFFFF!; ¡PUFFFF! ¡PUFFFF!; ¡PUFFFF! ¡PUFFFF! ¡PUFFFF!



Aquí tenemos el resultado: 413.

Y fijaos: hemos obtenido este resultado como si hubiéramos ido de izquierda a derecha y hubiéramos dicho:

5 menos 1 es 4,
3 menos 2 es 1,
y 6 menos 3 es 3.

¡Eso mismo! ¡Otra vez de izquierda a derecha!

$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline 413 \end{array}$$

Muy bien. Este ejemplo es demasiado bonito. ¿Qué tal $512 - 347$?

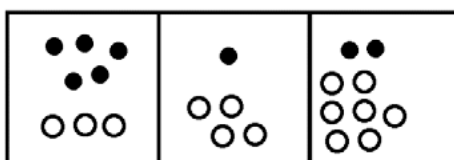
$$\begin{array}{r} 512 \\ - 347 \\ \hline \end{array}$$

Si vamos de izquierda a derecha, tenemos esto: 5 menos 3 es 1; 1 menos 4 es -3 ; y 2 menos 7 es -5 . La solución es dos centenas tres-ta negativo cinco negativo.

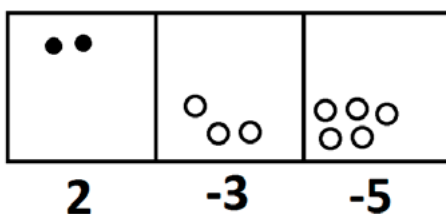
$$\begin{array}{r} 512 \\ - 347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

¡Y la solución es absolutamente correcta desde el punto de vista matemático! Lo demuestra la imagen.

Aquí tenemos cinco centenas, una decena y dos unidades junto con tres anticentenas, cuatro antidecenas y siete antiunidades.



Y después de todas las aniquilaciones que hemos visto, nos quedan dos centenas exactas, tres antidecenas y cinco antiunidades.



¡La solución de verdad es dos centenas tres-ta negativo cinco negativo!



Pero ya sabemos que a la sociedad le resultará muy rara esta solución a nuestra resta. ¿Podemos hacer que esta solución, que es correcta desde el punto de vista matemático, sea del gusto de la sociedad?



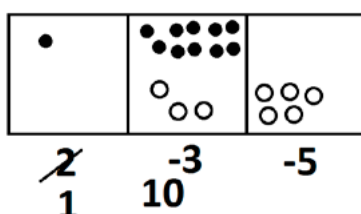
Es un momento de reflexión para los alumnos. Finalmente, alguien tiene una revelación y propone «hacer no explotar» un punto.

¡Genial! ¡Hagamos no explotar puntos! Cualquier punto situado en una casilla a la izquierda tiene que provenir de diez puntos situados en la casilla de su derecha, de modo que podemos hacerlo no explotar para producir diez puntos.

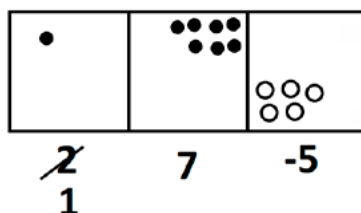
Pregunta: ¿qué efecto de sonido tendríamos que crear para la acción de hacer no explotar?

Con los alumnos, optamos por el sonido de una ventosa.

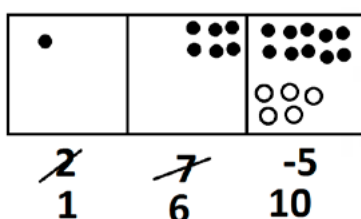
Muy bien. Ahora, hagamos no explotar uno de los dos puntos que tenemos en la casilla de la izquierda del todo. La imagen resultante es esta:



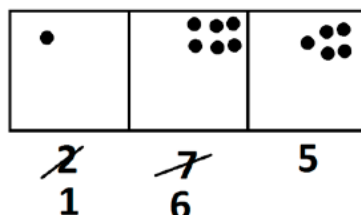
Después de las aniquilaciones, vemos que ahora tenemos este resultado: una centena setenta cinco negativo. ¡Precioso!



¡Volvamos a hacer no explotar puntos!



Y con algunas aniquilaciones más, acabamos obteniendo una solución que la sociedad puede entender: ciento setenta y cinco.



Apartado opcional: El algoritmo tradicional

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección opcional aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [2:25 minutos].

¿En qué se diferencia este método de los puntos y las casillas respecto al algoritmo estándar?

Volvamos a $512 - 347$.

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

Con el algoritmo estándar, empezamos por la derecha y nos fijamos primero en «2 menos 7», que no se puede hacer.

(Bueno, sí que se puede y da -5 , pero no tenéis por qué hacerlo con este algoritmo.)

Entonces, ¿qué tenéis que hacer?

Os «lleváis uno». Es decir, cogéis un punto de la columna de las decenas y lo hacéis no explotar para producir diez unidades. Con ello, quedan cero puntos en la columna de las decenas. Tenemos que escribir diez unidades para que acompañen el dos en la columna de las unidades.

$$\begin{array}{r} 0 \text{ } 10 \\ 5 \cancel{1} 2 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

Pero, como somos un poco listos, escribiremos 12 en vez de $10 + 2$. (Es decir, ponemos un 1 antes del 2 para que parezca un 12.)

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5 \cancel{1} 12 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

Y, entonces, decimos: «doce menos siete dan cinco», y escribimos este resultado.

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5 \cancel{1} 12 \\ -347 \\ \hline 5 \end{array}$$



La columna de la derecha ya está completa. Ahora seguimos con la columna del medio.

Vemos «cero menos cuatro», que no se puede hacer. Por tanto, hacemos otra no explosión, es decir, otro «me llevo», y entonces, en esta columna, tenemos $10 - 4$. Escribimos el resultado, que es 6.

A continuación, pasamos a la última columna, donde tenemos $4 - 3$, que da 1.

$$\begin{array}{r} 40 \\ \cancel{5} \cancel{1}^1 2 \\ - 347 \\ \hline 65 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \cancel{5} \cancel{1}^1 2 \\ - 347 \\ \hline 165 \end{array}$$

¡Uf!

Lo hemos vuelto a hacer. Todos los métodos matemáticos correctos son correctos, y elegir uno u otro para hacer restas es solo una cuestión de estilo. Con el algoritmo tradicional, vamos de derecha a izquierda y hacemos todas las no explosiones a medida que avanzamos. Con el método de los puntos y las casillas, primero «vamos haciendo» y, al final, realizamos todas las no explosiones. Ambos métodos son buenos y correctos.



Material A: La resta

Utilizad el material que encontraréis a continuación para los alumnos que quieran practicar con las preguntas de esta lección y reflexionar sobre ellas después en casa. NO son deberes, es totalmente opcional. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 4.*)

Puntos que explotan

Experiencia 4: La resta

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material A: La resta

Ahora podemos hacer una resta en una máquina $1 \leftarrow 10$ simplemente añadiendo antipuntos. (Hay quien prefiere llamarlos *otnups*.)

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet\bullet\bullet \\ \hline \circ\circ\circ \\ \hline \bullet\circ\circ\circ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet\bullet \\ \hline \circ\circ\circ \\ \hline \circ\circ\circ\circ \\ \hline \end{array}$$

2-3-5

Así pues, con las no explosiones podemos ver que este resultado es equivalente a 165.

Aquí tenéis un enunciado que podéis plantear, si queréis.

Calculad las dos restas siguientes con los dos métodos: el de puntos y casillas (con una solución que pueda entender la sociedad) y, a continuación, el del algoritmo tradicional. Las soluciones tendrían que coincidir.

$$\begin{array}{r} 6328 \\ - 4469 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 78390231 \\ - 32495846 \\ \hline \end{array}$$

Pregunta para reflexionar sobre la marcha: Cuando adaptáis vuestras soluciones a los gustos de la sociedad, ¿qué os parece más fácil: hacer no explosiones de izquierda a derecha o de derecha a izquierda?

Pregunta adicional: ¿Os parece que con el método de puntos y casillas podéis ir tan rápido como con el método tradicional que usáis ahora?



Soluciones a las preguntas de «Material A»

$$6328 - 4469 = 2 \mid -1 \mid -4 \mid -1 = 1 \mid 9 \mid -4 \mid -1 = 1 \mid 8 \mid 6 \mid -1 = 1 \mid 8 \mid 5 \mid 9 = 1859$$

$$\begin{aligned} 78390231 - 32495846 &= 4 \mid 6 \mid -1 \mid 0 \mid -5 \mid -6 \mid -1 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 9 \mid 0 \mid -5 \mid -6 \mid -1 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 8 \mid 10 \mid -5 \mid -6 \mid -1 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 8 \mid 9 \mid 5 \mid -6 \mid -1 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 8 \mid 9 \mid 4 \mid 4 \mid -1 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 8 \mid 9 \mid 4 \mid 3 \mid 9 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 8 \mid 9 \mid 4 \mid 3 \mid 8 \mid 5 = 45894385 \end{aligned}$$

A mí, personalmente, me parece mucho más fácil hacer las no explosiones de izquierda a derecha.

Material B: Exploraciones brutales

Utilizad el siguiente material para facilitarlo a aquellos alumnos que quieran reflexionar después en casa con preguntas profundas relacionadas con la experiencia. NO son deberes, es totalmente opcional, pero podría servir como fuente para futuros proyectos de los alumnos. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 4.*)



Puntos que explotan

Experiencia 4: La resta

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material B: Exploraciones brutales

Aquí tenéis algunas investigaciones sobre «grandes preguntas»: podéis explorarlas o simplemente reflexionar sobre ellas. ¡Divertíos!

EXPLORACIÓN 1: ¿HAY ALGÚN OTRO MODO DE INTERPRETAR LOS RESULTADOS QUE OBTENEMOS CON LOS PUNTOS Y LAS CASILLAS?

Cuando Omar vio esto,

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

escribió en la libreta estas líneas:

$$\begin{array}{r} 200 \\ -30 \\ -5 \end{array}$$

Después dijo que la solución tenía que ser 165.

- ¿Podéis explicar qué veía y pensaba?
- ¿Que creéis que escribió Omar para $7109 - 3384$?

EXPLORACIÓN 2: ¿Y QUÉ OS PARECEN LAS SOLUCIONES NEGATIVAS?

¿Cómo abordaríais e interpretaríais esta resta?

$$\begin{array}{r} 148 \\ -677 \\ \hline \end{array}$$

